

مبرهنة :

إذا كانت E مجموعة ما تحت العمليات التبادلية \wedge, \vee حيث تحققت الشروط من (1 - 4) أو (\wedge, \vee) اللانتهى والتبديل (عندئذ توجد علاقة ترتيب جزئية وحيدة في E على المجموعة E بحيث تكون (E, \leq, \wedge, \vee) شبكة

- تعريف الشبكات الجزئية.

لنكن (E, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، لنكن $S \subseteq E$ عندئذ نقول عن S أنها شبكة جزئية من E إذا حققت عاملاً \wedge, \vee جميع شروط الشبكة - يتبع من التعريف :

إذا كانت $S \subseteq (E, \leq, \wedge, \vee)$ شبكة جزئية من E إذا وفقط إذا

$$\forall x, y \in S \quad x \vee y \in S \quad \text{و} \quad x \wedge y \in S$$

مثال :

إن مجموعة الأعداد الطبيعية شبكة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية

$$(N, \leq, \wedge, \vee) \subseteq (Z, \leq, \wedge, \vee) \subseteq (Q, \leq, \wedge, \vee) \subseteq (R, \leq, \wedge, \vee)$$

تحت عملية الترتيب الطبيعي في هذه الحالة يكون

$$\sup = \max, \quad \inf = \min$$

مثال :

شبكة الأعداد الطبيعية، بالترتيب جزئياً ببلاتة التسمية

$$(N, \leq, \wedge, \vee)$$

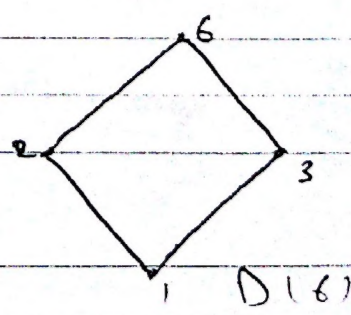
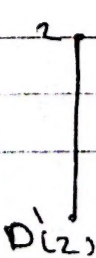
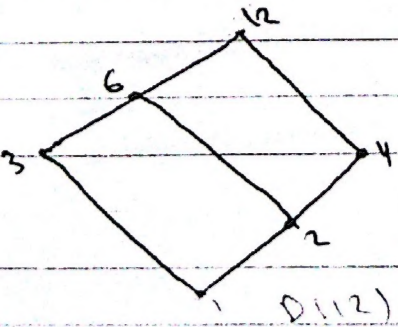
$$a \vee b = p, c, m(a, b)$$

$$a \wedge b = g, c, d(a, b)$$

ومجموعات قواسم الأعداد كلها شبكات جزئية من هذه الشبكات مثل

$D(6)$ ، ويكون عام كل الشبكات

$$D(n); n \in N \text{ هي شبكات جزئية من } D(12), D(6), D(12)$$



محاضرات الدفتر

المحاضرة :

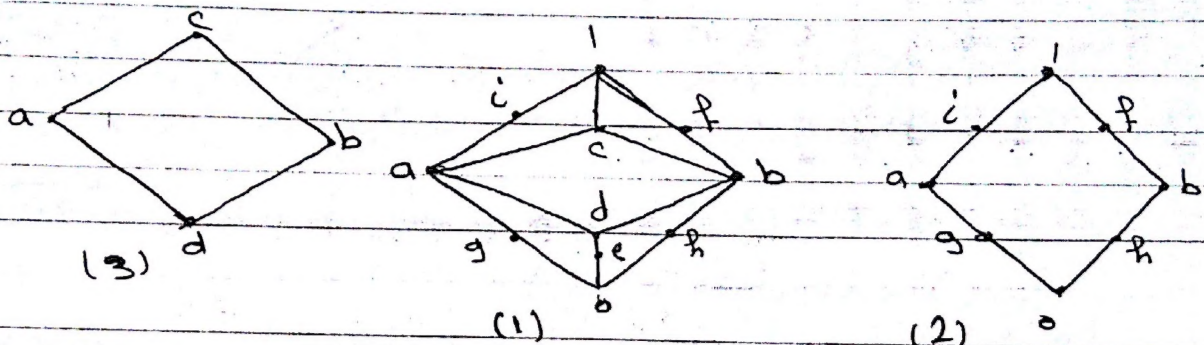
المادة :

السنة :

القسم :

ملاحظة :

يمكن لعقد المجموعات الجزئية (S, \leq) من شبكة (E, \leq, \vee, \wedge) تحت علاقة الترتيب \leq أن تكون شبكة دون أن تكون شبكة جزئية من ذلك. فلك عندنا تباين الحد الأعلى الأصغر والحد الأدنى الأعظم كما في المثال التالي.



(2) لا تشكل شبكة جزئية من (1) ولكن هي شبكة بحد ذاتها.

$$a \vee b = c$$

ولكن c غير موجود في الشبكة (2).

(3) - شبكة صفة جزئية من الشبكة (1)

بما الجدار المبدا تحت الشبكات

تعريف

إذا كانت (E_1, \leq_1) و (E_2, \leq_2) مجموعتين مرتبتين جزئياً عندنا سيمي مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x, y) والتي مقاطع الأولى من E_1 ومقاطع الثانية من E_2 والتي تحققت الشرط

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_1 x_2 \text{ و } y_1 \leq_2 y_2$$

وهي الجدار المبدا تحت المجموعات المرتبة جزئياً ونزولاً بالمرز $E_1 \times E_2$

سمة مبرهنة مهمة

إن الجدار المبدا تحت هي شبكتين هرتشبكة صفة

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \text{ و } b_1 \leq b_2$$

$$2) - (a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$$

$$3) - (a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) ; \forall a_1, a_2 \in E_1, \forall b_1, b_2 \in E_2$$

$$(E_1 \times E_2, \leq)$$

وهذا ما سنبينه (صحة تعريفه سابقة) ان

مجموعة مرتبة جزئياً سوف تثبت ان لا شيء

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in E_1 \times E_2$$

ان

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) \dots (1)$$

$$(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) \dots (2)$$

سوف تثبت (1)، (2)

لنضع

$$(d_1, d_2) = (a_1, b_1) \vee (a_2, b_2)$$

$$(a_1, b_1) \leq (d_1, d_2) \quad \& \quad (a_2, b_2) \leq (d_1, d_2)$$

$$\Rightarrow a_1 \leq d_1 \quad \& \quad a_2 \leq d_1 \quad \& \quad b_1 \leq d_2 \quad \& \quad b_2 \leq d_2$$

هنا يعني ان d_1 هو الحد الأعلى المشترك لـ a_1, a_2 و d_2 هو الحد الأعلى المشترك لـ b_1, b_2

$$\Rightarrow a_1 \vee a_2 \leq d_1 \quad \& \quad b_1 \vee b_2 \leq d_2 \Rightarrow$$

$$(a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) \leq (d_1, d_2) \dots (f)$$

كذلك

$$a_1 \leq a_1 \vee a_2, \quad b_1 \leq b_1 \vee b_2, \quad a_2 \leq a_1 \vee a_2, \quad b_2 \leq b_1 \vee b_2$$

$$\Rightarrow (a_1, b_1) \leq (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$$

$$(a_2, b_2) \leq (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$$

هذه هي النتيجة وبالتالي يتبع ان

$$(d_1, d_2) = (a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) \leq (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) \dots (g)$$

ومن ثم (f), (g) تتبع الى (1) او (2)

$$(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

وبذلك نكون قد برهننا ان الجداء المباشري يتكافئ هو شبكة.
مثال :

لنكن لدينا المجموعات التالية

$$U = \{a, a^2\}$$

$$P = \{\emptyset, \{a\}\}$$

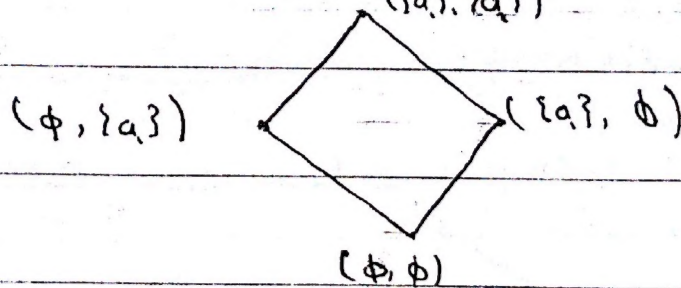
$$Q = \{\emptyset, \{a^2\}\}$$

المطلوب :

بين ان كل من (P, \subseteq) ، (Q, \subseteq) ، (U, \cdot) هي ارجحيات
في $P \times Q$ ، الشبكة $P \times P \times P$ هي ارجحيات خطية (لها).

الحل :

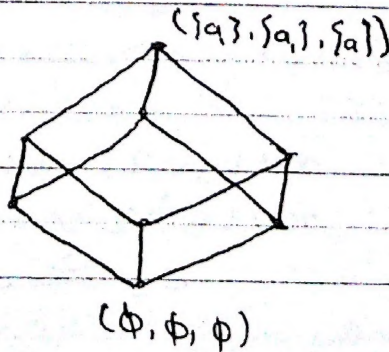
$$P \times Q = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a^2\}), (\{a\}, \emptyset), (\{a\}, \{a^2\})\}$$



$$P \times P \times P = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{a\}, \emptyset), (\{a\}, \emptyset, \emptyset),$$

$$(\emptyset, \{a\}, \{a\}), (\{a\}, \emptyset, \{a\}), (\{a\}, \{a\}, \emptyset),$$

$$(\{a\}, \{a\}, \{a\})\}$$



محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

: $\bar{\sigma}_p$

فایہ سبکۃ

(E, \leq, \vee, \wedge) حقیقت مانے ۱

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

-11

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

C2

~~Red~~ 2211: 22281

$$x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z) \not\vdash x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z) \quad \text{no}$$

$$\Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

(12)

$$x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y \quad \neq \quad x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z \quad (2)$$

وكانت $xv(417)$ من أدنى العناوين.

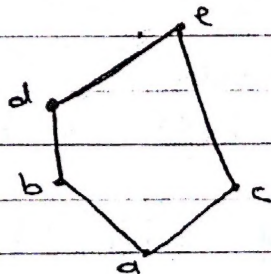
$$\Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$\forall x, y, z \in E$$

ملامحه

إن الممارسة في (١) و (٢) لسياسة لوجستية في الحالة، وهذا المثال، التالي يوضح ذلك.

مثالاً لتكن لدينا الشبكة المثلثة بخطوطها هي:



$$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d$$

十

$$(d \wedge b) \vee (d \wedge c) = b \vee a = b$$

سب انواع السبكات:

من هذه الأنواع المعروفة :

11- شبكة التوزيعية :

نقول عن الشبكة التوزيعية إذا تحققت ~~بعض~~ ~~من~~ ~~ال~~ ~~شروط~~ ~~ال~~ ~~شبكة~~ ~~التوزيعية~~ ~~عنا~~ ~~مرها~~ ~~أحد~~
الشروط التالية.

1) - $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z); \forall x, y, z \in B$

لَبَّيْكُمْ هَـذَا الْقَصِيَّةُ لَأَن السَّرِيَّةَ سَكَّافِيْنَ .

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

(1) ← (2)

لنأخذ الطرف الأيسر من المساواة (2)

$$x \vee (y \wedge z) = [x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z)$$

$$= x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]$$

وهو (1) فرضاً ~~وهو (1) فرضاً~~

$$= x \vee [(x \vee y) \wedge z]$$

$$= (x \wedge (x \vee y)) \vee [z \wedge (x \vee y)]$$

وهو (1) فرضاً

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

من (2) ← (1) يتم بنفس الطريقة تماماً.

العلاقة على الشبكات التوزيعية :

$$X = \{a, b, c\}$$

(1) - إذا كانت :

$$\text{هذه } (N, \leq, \vee, \wedge, \rho(X)) \text{ شبكة توزيعية ؟}$$

هي شبكة توزيعية

(2) - مجموعة الأعداد الطبيعية المرتبة جزئياً بالشبكة لعلاقة التسمية أي

$$(N, \leq, \vee, \wedge) \text{ هي شبكة توزيعية.}$$

ملاحظات :

1- أن كل شبكة جزئية من شبكة توزيعية هي شبكة توزيعية

2- أن كل شبكة تحت علاقة ترتيب كلي هي شبكة توزيعية.

نتيجة : من التعريف السابق نجد أن الشبكة تكون توزيعية إذا حققت عندها

الخاصة التوزيعية :

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

- تعريف : شبكة مودولية :

لكن (E, \leq, \vee, \wedge) شبكة نقول عن هذه الشبكة المودولية

إذا كان $x \leq z$ فإن :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

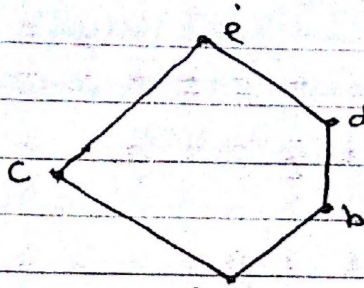
نتيجة :

أن كل شبكة توزيعية هي شبكة مودولية وذلك لأن :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

مثال: لنكن لدينا الشبكة المعتلة بخطأ هاريس hd هي شبكة مودولية



الاثبات: لنين شبكة مودولية نضع

لدينا a

$$b \leq a$$

$$b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$$

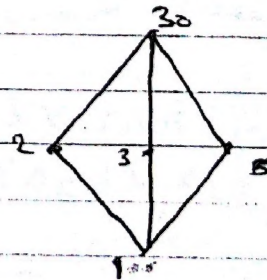
#

$$(b \vee c) \wedge d = e \wedge d = d$$

علامات

1- ان كل شبكة جزئية في شبكة مودولية هي ايضا مودولية.
2- و هذا ان كل شبكة توزيعية هي شبكة مودولية ولكن العكس غير صحيح
في الحالة العامة، اذا لم توجد شبكات مودولية وليكن لدينا توزيعية.

لينة توزيعية ولكن مودولية.



مثال:

التمهيد المحاضرة

٨٨

٨٩